

Álgebra III

Examen VI

FACULTAD
DE
CIENCIAS
UNIVERSIDAD DE GRANADA



Los Del DGIIM, losdeldgim.github.io

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada



Esta obra está bajo una Licencia Creative Commons Atribución-NoComercial-SinDerivadas 4.0 Internacional (CC BY-NC-ND 4.0).

Eres libre de compartir y redistribuir el contenido de esta obra en cualquier medio o formato, siempre y cuando des el crédito adecuado a los autores originales y no persigas fines comerciales.

Álgebra III

Examen VI

Los Del DGIIM, losdeldgiim.github.io

Granada, 2025

Asignatura Álgebra III.

Curso Académico 2022/23.

Grado Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas.

Grupo Único.

Profesor José Gómez Torrecillas.

Descripción Examen Extraordinario.

Ejercicio 1. Tomemos $f = x^3 - 2 \in \mathbb{Q}(\sqrt{3})[x]$ y K el cuerpo de descomposición de f sobre $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$.

- a) Calcular razonadamente $[K : \mathbb{Q}(\sqrt{3})]$.
- b) Describir los elementos del grupo $\text{Aut}_{(\mathbb{Q}(\sqrt{3}))}(K)$.
- c) Calcular todas las subextensiones de la extensión $\mathbb{Q}(\sqrt{3}) \leq K$.
- d) Dar todas las subextensiones de $\mathbb{Q}(\sqrt{3}) \leq K$ que contienen al número $\sqrt{3} + i$.

Ejercicio 2. Consideremos una raíz cónica primitiva de la unidad $w \in \mathbb{C}$. Decidir razonadamente si $\mathbb{Q}(w) = \mathbb{Q}(\frac{1}{w+1})$.

Ejercicio 3. Sea $g = x^3 + x^2 - 1 \in \mathbb{F}_3[x]$ y F un cuerpo de descomposición sobre \mathbb{F}_3 de g .

- a) Describir los elementos del grupo $\text{Aut}(F)$ y calcular todos los subcuerpos de F .
- b) Si $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in F$ son las raíces de g , decidir si $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 \in \mathbb{F}_3$.
- c) Resolver la ecuación $x^2 + 1 = 0$ en F .

Ejercicio 4. Decidir razonadamente sobre la veracidad de las siguientes afirmaciones:

- a) $\sqrt[6]{32} - \sqrt[6]{16} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt[3]{2})$.
- b) Si $F \leq K$ es una extensión de Galois y $\alpha \in K$ es tal que $\sigma(\alpha) \neq \alpha$ para todo $\sigma \in \text{Aut}_F(K)$ distinto de la identidad, entonces $K = F(\alpha)$.
- c) Si $f \in \mathbb{Q}[x]$ es un polinomio de grado 3 y tiene una raíz construible, entonces f es reducible.
- d) Sea F un cuerpo de descomposición de $f = x^2 + x + 1 \in \mathbb{F}_5[x]$ y $\alpha \in F$ una raíz de f . Para $g = \text{Irr}(\alpha + 1, \mathbb{F}_5)$ se tiene que $g(\alpha) = 3\alpha$.