Álgebra III
Examen VI

Foto: José Juan Castro

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada

Álgebra III
Examen VI

Los Del DGIIM, losdeldgiim.github.io

Granada, 2025

Asignatura Álgebra III.

Curso Académico 2022/23.

Grado Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas.

Grupo Único.

Profesor José Gómez Torrecillas.

Descripción Examen Extraordinario.

Ejercicio 1. Tomemos $f = x^3 - 2 \in \mathbb{Q}\left(\sqrt{3}\right)[x]$ y K el cuerpo de descommposición de f sobre $\mathbb{Q}\left(\sqrt{3}\right)$.

a) Calcular razonadamente $[K : \mathbb{Q}(\sqrt{3})]$.

b) Describir los elementos del grup $\mathrm{Aut}_{(\mathbb{Q}(\sqrt{3}))}(K)$.

c) Calcular todas las subextensiones de la extensión $\mathbb{Q}(\sqrt{3}) \leqslant K$.

d) Dar todas las subextensiones de $\mathbb{Q}(\sqrt{3}) \leqslant K$ que contienen al número $\sqrt{3} + i$.

Ejercicio 2. Consideremos una raíz cúbica primitiva de la unidad $w \in \mathbb{C}$. Decidir razonadamente si $\mathbb{Q}(w) = \mathbb{Q}(\frac{1}{w+1})$.

Ejercicio 3. Sea $g = x^3 + x^2 - 1 \in \mathbb{F}_3[x]$ y F un cuerpo de descomposición sobre $\mathbb{F}_3$ de g.

a) Describir los elementos del grupo $\mathrm{Aut}(F)$ y calcular todos los subcuerpos de F.

b) Si $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in F$ son las raíces de g, decidir si $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 \in \mathbb{F}_3$.

c) Resolver la ecuación $x^2 + 1 = 0$ en F.

Ejercicio 4. Decidir razonadamente sobre la veracidad de las siguientes afirmaciones:

a) $\sqrt[6]{32} - \sqrt[6]{16} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt[3]{2})$.

b) Si $F \leqslant K$ es una extensión de Galois y $\alpha \in K$ es tal que $\sigma(\alpha) \neq \alpha$ para todo $\sigma \in \mathrm{Aut}_F(K)$ distinto de la identidad, entonces $K = F(\alpha)$.

c) Si $f \in \mathbb{Q}[x]$ es un polinomio de grado 3 y tiene una raíz construible, entonces f es reducible.

d) Sea F un cuerpo de descomposición de $f = x^2 + x + 1 \in \mathbb{F}_5[x]$ y $\alpha \in F$ una raíz de f. para $g = \mathrm{Irr}(\alpha + 1, \mathbb{F}_5)$ se tiene que $g(\alpha) = 3\alpha$.